Teoria dell'informazione e capacità di canale (ver. 1.02)

Definizione e misura dell'informazione

Si definisce l'unità di misura dell'informazione come quella quantità di informazione che è necessaria a risolvere un quesito binario equiprobabile. La risposta a questo quesito ha, a priori, la probabilità del 50% di essere di un tipo o dell'altro, e quindi l'arrivo della risposta si considera come un evento di probabilità 50%. L'informazione per eventi di probabilità più bassa veicolano un'informazione maggiore.
In generale l'informazione portata da un evento che a priori ha probabilità p di verificarsi e' data dalla:

$$I = \log_2\left(\frac{1}{p}\right)$$

e si misura in bit (nel seguito useremo la parola infobit per distinguerlo dal bit inteso come numero binario)

Definizione di sorgente discreta

Una sorgente discreta (o numerica, o digitale) è un emettitore di simboli appartenenti ad un insieme limitato (chiamato alfabeto della sorgente) per ciascuno dei quali è definita una probabilità di comparsa.
La descrizione di una sorgente discreta è normalmente realizzata con una tabella in cui accanto ai simboli dell'alfabeto compaiono anche le probabilità a loro associate, e frequentemente ad essa si accompagna anche la frequenza di emissioni dei simboli, che per noi sarà una costante, e che si chiama velocità di cifra.

Entropia di una sorgente discreta

Poiché, per quanto detto a proposito di una sorgente discreta, ogni suo simbolo ha una certa probabilità di comparsa, allora a questo evento può essere associata anche un'informazione, e la sorgente discreta diventa anche una sorgente di informazione.
Si definisce entropia la quantità di informazione media associata ad ogni simbolo emesso, e si calcola con la formula:

$$E = \sum_{i=1}^{N} I(x_i)p(x_i)$$

dove $p(x_i)$ è la probabilità del simbolo x_i, $I(x_i)$ è la sua informazione e la sommatoria è estesa a tutti i simboli dell'alfabeto (N nel caso esposto)

Baud, bit e velocità di cifra e velocità di informazione

Se una sorgente è binaria, ossia ha soltanto due simboli, essi prendono genericamente anche il nome di bit, e la sua velocità di cifra, chiamata anche bit rate, si esprime in bit/s.
Se la sorgente non è binaria e possiede quindi un alfabeto più esteso, la sua velocità di cifra si esprime in simboli/s, e si parla di symbol rate. Il symbol rate viene poi misurato in baud, essendo 1 baud pari a 1 simbolo/s. In questo contesto si parla anche di baud rate.
Attenzione a non confondere baud rate con bit rate, poiché essi coincidono soltanto nel caso di una sorgente binaria, mentre in generale sono diversi.
La velocità di informazione (o flusso informativo) corrisponde al numero di infobit al secondo forniti dalla sorgente. Li si può calcolare moltiplicando la velocità di cifra per l'entropia, che è la quantità di infobit portata mediamente da ogni simbolo:

$$V_{info} = V_{symb} * E$$

Attenzione però a non confondere velocità di cifra e velocità informativa, che sono concettualmente differenti.

Canale di comunicazione informativo

E' il mezzo tramite il quale le informazioni emesse dalla sorgente raggiungono il ricevitore.
In concreto si tratta di mezzi di comunicazione analogici, dotati quindi di una gamma infinita e continua di stati possibili. Quando li si usa per trasportare delle informazioni discrete, allora ad ognuna di esse viene associato uno stato differente.

Capacità di canale

Si definisce capacità di canale il massimo flusso informativo in grado di attraversare un canale senza errori

Influenza del rumore

In un canale di trasmissione il rumore è un segnale aleatorio che tende ad alterare i bit trasmessi. Questa alterazione ha luogo quando il canale assume un certo stato impostogli dal trasmettitore (corrispondente ad una informazione discreta) e viene forzato dal rumore in uno stato (analogico) differente. Se il rumore è piccolo lo scostamento dallo stato corretto è piccolo, e in generale il ricevitore è in grado di riconoscere quello originale; tuttavia se il rumore è ingente può arrivare a modificare lo stato del canale fino ad avvicinarlo ad uno stato associato ad un'informazione diversa; se questo spostamento dallo stato corretto (il primo) copre almeno la metà della distanza che lo separa dal secondo, il ricevitore prende la decisione sbagliata e riconosce un'informazione differente da quella di partenza: il rumore ha causato in un caso come questo un errore di trasmissione.

Capacità di canale in assenza di rumore

Nei calcoli che seguono si ipotizza di non avere rumore in trasmissione o, in pratica, di poterlo trascurare. La caratteristica del canale che ne limiterà le prestazioni in termini di capacità sarà allora la velocità massima con cui esso può passare da uno stato all'altro, a sua volta condizionata dalle caratteristiche di banda passante del canale stesso, in particolare dalla sua frequenza di taglio superiore.

Capacità di un canale binario privo di rumore

Un bit di un segnale binario può essere scelto tra uno 0 ed un 1, e quindi è in grado di veicolare una unità di informazione in modo diretto. Un canale binario con frequenza di taglio superiore f_T è in grado di trasmettere la fondamentale di un segnale alternato di frequenza f_T, il quale si può considerare come un segnale binario che veicola 2* f_T bit al secondo. La fondamentale è sufficiente e necessaria per recuperare i bit trasmessi e quindi, in definitiva, l'informazione contenuta. Un generico segnale binario generato da una sequenza di bit emessi a frequenza 2* f_T genera un segnale con una banda inferiore a quella del segnale alternato dato che rispetto a quest'ultimo presenta delle variazioni meno brusche. Si conclude quindi che il canale passa basso binario di banda f_T è in grado di trasmettere ogni segnale binario di frequenza 2* f_T qualunque esso sia, ovvero, in termini equivalenti, esso è in grado di trasmettere ogni flusso informativo inferiore a 2*f_T infobit/sec.

Capacità di canale su canale multiplo privo di rumore

Se un canale con un numero di stati pari ad N viene usato per trasmettere un flusso informativo, esso sarà soggetto a continui salti da uno stato all'altro. Per un segnale casuale la probabilità di trovarsi in uno stato è quindi 1/N e dunque ogni stato porta con se $\log_2(N)$ infobit di informazione.
Se ora si vuole rendere massimo l'utilizzo di banda di questo segnale, si farà saltare il canale tra i due stati a cui sono associati i due livelli analogici estremi, in modo da avere le variazioni più brusche possibili. In queste condizioni, se f_T è la banda del canale, all'estremo opposto sarà possibile ricostruire il flusso informativo finché ci si manterrà sotto questa frequenza. Poiché a frequenza f_T si hanno 2* f_T salti di stato, il numero di infobit massimo trasmissibile sarà $2f_T\log_2(N)$ che rappresenta quindi la capacità di questo tipo di canale

Capacità di canale in presenza di rumore: formula di Shannon

Se un canale è multistato ma privo di rumore si conclude, dalla formula precedente che la sua capacità di canale può crescere in modo indefinito: basta scegliere un numero di stati alto a piacere, cosa sempre possibile poiché si parla di stati analogici che, essendo distribuiti in modo continuo, possono essere in numero infinito. Il rumore però interviene a limitare questa capacità perché mano a mano che gli stati si infittiscono esso provoca degli errori di trasmissione sempre più probabili. Se si aggiungono dei bit alle informazioni per correggre gli eventuali errori, si potrebbe pensare di rimediare, ma dato che i bit di controllo aggiunti non portano con se alcuna informazione pur occupando una parte di risorse del canale, questo apparente vantaggio viene ottenuto a spese della capacità informativa del canale e ad un certo punto il peso di questa sottrazione annulla il beneficio che i bit di correzione di errore portano.
Shannon ha dimostrato che in presenza di un rumore gaussiano non è possibile superare un limite teoricamente ben definito e calcolabile con una formula che porta il suo nome:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

dove B è la banda del canale, S la potenza del segnale e N la potenza del rumore