

Sintesi de:

La Teoria Matematica delle Comunicazioni

v. 1.0

A cura di **Vito Di Fonzo**

Copyright (c) 2007 Vito Di Fonzo

Chiunque può copiare e distribuire copie letterali di questo documento di licenza, ma non ne è permessa la modifica.

Testo di riferimento: **La Teoria Matematica delle Comunicazioni** di Claude E. Shannon e Warren Weaver

Il testo proposto è una sintesi dei primi due capitoli del libro sopracitato al fine di fornire un testo comprensibile, completo e allo stesso tempo sintetico di alcuni degli argomenti trattati nel celeberrimo libro di Claude E. Shannon.

1. Nota introduttiva sulla impostazione generale degli studi analitici sulle comunicazioni

1.1 Comunicazione

Il termine comunicazione è da intendersi come processo attraverso il quale un sistema può influenzare un altro.

1.2 Tre livelli di problemi riguardanti le comunicazioni

- A. Con quanta esattezza possono essere trasmessi i simboli della comunicazione (problema tecnico)
- B. Con quanta precisione i simboli trasmessi trasferiscono il significato desiderato (problema semantico)
- C. In che misura il significato giunto a destinazione induce realmente ad un comportamento nel senso desiderato (problema di efficacia)

1.3 Osservazioni

I problemi più rilevanti sembrano essere i punti B e C, ma dopo una attenta analisi, si comprende che il livello A abbraccia gli altri due e che quindi la teoria riguardante il primo livello influenza anche gli altri.

2. Problemi della comunicazione al livello A

2.1 Un sistema di comunicazione e i problemi relativi

La trasmissione di una serie di informazioni avviene in tal modo:

- La sorgente di informazione sceglie un messaggio
- Il trasmettitore converte il messaggio nel segnale e lo invia al ricevitore tramite il canale di comunicazione
- Il ricevitore è una specie di trasmettitore alla rovescia che riconverte i segnali trasmessi in un messaggio e lo invia al destinatario

Nel corso della trasmissione però si aggiungono al segnale alcune cose non desiderate che generano un'alterazione del segnale. Ogni alterazione del segnale trasmesso è detta disturbo.

2.2 Informazione

Il termine informazione usato nella teoria delle comunicazioni è usato in un'accezione che lo differenzia dal "significato", contrariamente all'uso comune. In due messaggi distinti infatti il significato può essere diverso pur avendo la stessa "quantità informazione". Questo è ciò che intende Shannon quando afferma che: "gli aspetti semantici della comunicazione sono irrilevanti per quelli tecnici". Ciò però non è valido per il contrario, ovvero gli aspetti tecnici non sono affatto irrilevanti per quelli semantici.

L'informazione in definitiva non rappresenta tanto ciò che si comunica, quanto ciò che si potrebbe comunicare. È una misura della libertà di scelta nella composizione del messaggio. In particolare è possibile misurare l'informazione calcolando il logaritmo in base 2 del numero di scelte possibili. Nel caso del sistema binario in cui abbiamo due possibili scelte, il logaritmo risulta essere 1. Questa unità di informazione è chiamata **Bit** (da Binary Digit) o cifra binaria. È da sottolineare inoltre la comodità dell'uso dei logaritmi in questi ambiti dato che con un valore molto piccolo riusciamo a descrivere quantità enormi.

L'uso del sistema binario inoltre permette di adattare i problemi ai circuiti elettrici rappresentando ad esempio lo stato "1" con un circuito chiuso e lo stato "0" con un circuito aperto.

Altro importante fattore nella composizione di un messaggio è la probabilità con la quale si scelgono i singoli simboli che spesso dipende anche dai simboli precedenti. Un sistema che produce una sequenza di simboli conformemente a certe probabilità stabilite è detto processo stocastico, mentre un processo stocastico in cui le probabilità dipendono anche dagli eventi precedenti è detto **processo markoviano** (o di Markoff). Il **processo ergodico** invece è un processo in cui si prende in considerazione una tale quantità di eventi da rendere la probabilità praticamente certa indipendentemente dalla scelta dei campioni.

La quantità di informazione relativa ad una sorgente che sceglie uno dopo l'altro i simboli del messaggio può essere facilmente descritta con quella che è conosciuta in termodinamica come **entropia**. Con tale unità è possibile misurare il grado di casualità o di "confusione" del sistema e risulta quindi fondamentale nella descrizione dei processi che regolano la teoria delle comunicazioni. Avendo calcolato l'entropia di una sorgente, la si può mettere a confronto con l'entropia massima (a condizione che mantenga gli stessi simboli). Il rapporto tra questi due valori è detto entropia relativa della sorgente. Più si avvicina a 1, maggiore è la libertà di scelta. La differenza tra 1 e l'entropia relativa indica la **ridondanza** ovvero la ripetizione di simboli, senza dei quali il messaggio è comunque comprensibile o può essere ricostruito. In definitiva l'informazione (entropia) aumenta o all'aumentare del numero di casi e quanto più le alternative sono equiprobabili.

2.3 Capacità di un canale di comunicazione

La **capacità** di un canale misura la quantità di informazione trasmessa al secondo, usando i bit al secondo (b/s) come unità di misura.

2.4 Codifica

Per far sì che l'informazione possa essere trasmessa, questa deve adattarsi anche alle caratteristiche del mezzo di comunicazione. Per questo motivo è indispensabile codificare il segnale. Mentre la linea telefonica, ad esempio, trasmette un segnale analogico, quindi "analogo" a quello generato dalla sorgente, in una comunicazione digitale il segnale della sorgente è spesso completamente diverso da quello trasmesso (un suono non è affatto simile ad una sequenza di 0 e 1) e la codifica è quindi più complessa. Dall'altra parte poi, ci dovrà essere un ricevitore in grado di de-codificare il segnale acquisito.

Premesso ciò possiamo enunciare il teorema fondamentale riguardante un canale non disturbato che trasmette simboli discreti:

Il teorema afferma che:

In un canale di capacità C bit/sec che accetta segnali da una sorgente di entropia H bit/sec adottando particolari procedure di codifica, è possibile trasmettere simboli ad una velocità media prossima a C/H , ma in ogni caso non si può mai superare a tale valore.

Da queste osservazioni è possibile definire il tipo di codifica più efficiente.

Il miglior trasmettitore infatti è quello che codifica i messaggi in modo tale che il segnale possieda proprio quelle caratteristiche statistiche ottime che meglio convengono al canale che deve essere utilizzato, rendendo di fatto massima l'entropia del segnale e la rendono uguale alla capacità del canale.

Un piccolo problema però nasce dal fatto che più ci si avvicina ad una codifica ottimale, più tempo questa richiede per restituire il segnale codificato. Naturalmente i tempi di codifica sono talmente brevi da rendere comunque efficiente il processo guadagnando in velocità.

2.5 Disturbo

Nella definizione di informazione abbiamo detto che questa aumenta all'aumentare dell'incertezza. Nel momento in cui quindi, andassimo ad aggiungere una fonte di disturbo, l'incertezza aumenterebbe e saremmo portati ad affermare che avvenga anche un aumento di informazione. Questa invece è una trappola semantica in cui si può cadere perché l'incertezza sorta a causa di errori o per l'influenza di un disturbo è una incertezza indesiderabile. L'informazione aggiunta infatti è falsa ed indesiderabile e quindi per ottenere l'informazione originale bisogna "pulire" il messaggio dal disturbo. Questo è possibile conoscendo quella che è l'"**equivocazione**" del messaggio, ovvero la misura di quanto un simbolo possa essere scambiato con un altro in seguito ad un errore o un disturbo. Con questa misura possiamo quantificare l'incertezza media nel messaggio quando il segnale è noto.ù

A questo punto possiamo spiegare cosa si intende per capacità C di un canale disturbato. Essa esprime la velocità massima (bit/sec) a cui l'informazione utile (priva di disturbo) può essere trasmessa tramite il canale. Si parla di velocità massima proprio perché questa velocità dipende anche dalle caratteristiche della sorgente e del canale. Con una opportuna codifica si può rendere massima la velocità di trasmissione di informazione utile.

Si può ora enunciare il teorema secondo il quale per avere un errore di trasmissione piccolo, la capacità del canale deve essere maggiore o uguale dell'entropia della sorgente di informazione. Se la capacità è invece minore dell'entropia, risulterà impossibile progettare codici che riducano la frequenza di errore.

2.6 Messaggi continui

Fino ad ora abbiamo analizzato teorie valide per i segnali discreti. Analizzeremo ora come vengono trattati i segnali continui come ad esempio una voce o un suono. Dal punto di vista pratico, ci si interessa sempre di un segnale continuo costituito di semplici componenti armoniche e non di tutte le frequenze, ma di una banda ben definita che va da 0 a W Hz. La voce umana ad esempio può essere compresa anche con le sole frequenze che vanno da 0 a 4000 Hz ad esempio.

Un teorema matematico afferma che un segnale continuo, di T secondi di durata e limitato nella frequenza ad una banda da 0 a W Hz, può essere completamente specificato fissando $2TW$ numeri. In tal modo definiamo una curva continua con un numero finito di punti che anche se molti, rimangono finiti.

Un altro teorema enunciato nella teoria riguardo i segnali continui è il seguente:
dati:

- C = capacità del canale
- W = banda di frequenza
- P = potenza media usata per trasmettere
- N = potenza del disturbo (rumore bianco termico)

Si ha che **$C = W \log_2 (1 + P/N)$**

Con questa formula, Shannon trova la velocità (bit/sec) massima di trasmissione data dal miglior sistema di codifica per la trasmissione di cifre binarie. Questo valore non può essere assolutamente superato ed è valido nel caso del rumore bianco. Per gli altri tipi di disturbi Shannon riesce a calcolare comunque dei valori massimi e minimi utili comunque alla progettazione.

3. Le interrelazioni dei tre livelli dei problemi delle comunicazioni

3.1 Premessa

In relazione ai tre livelli delle comunicazioni di cui si è parlato precedentemente, ci si potrebbe chiedere:

- livello A. Con quanta esattezza posson venir trasmessi i simboli della comunicazione ?
- livello B. Con quanta precisione i simboli trasmessi trasferiscono il significato desiderato ?
- livello C. In che misura il significato giunto a destinazione induce realmente ad un comportamento nel senso desiderato ?

Analizzeremo ora i motivi per i quali si può affermare che, in realtà, i tre livelli sono talmente in relazione tra loro, da poter considerare questa divisione artificiale e da scartare.